DESCRIERE SOLUŢII

PROBLEMA 1

Autor: student Dospra Cristian
Facultatea de Informatică, Universitatea București

ARCHIE

Soluție O(N2) – 20p

Soluția trivială este de a calcula distanța între oricare două puncte și de a o alege pe cea maximă.

Soluție O(NlogN) – 100p

Pasul 1:

Sortăm punctele crescător după abscisă iar în caz de egalitate, crescător după ordonată.

Pasul 2:

Considerăm înfășurătoarea convexă a celor N puncte. Este evident că cele două puncte care dau distanța maximă sunt puncte ce se află pe înfășurătoare.

Pasul 3:

Datorită faptului că punctele au coordonate întregi și relativ mici, numărul de puncte de pe înfășurătoare nu poate fi foarte mare. Putem astfel să aplicăm strategia brute-force, doar pe punctele aflate pe înfășurătoare.

PROBLEMA 2

Autor(i): elev Moldoveanu Vlad
Colegiul Național "Mihai Viteazul", Ploiești
student Dospra Cristian
Facultatea de Informatică, Universitatea București

DRUM

Soluție O(X*Y*Z) 60p

Vom folosi programare dinamică.

Fie două matrice 3D a, b. a[i][j][k] reprezintă numărul drumurilor care se termină în punctul (i,j,k) și au ca ultim segment o mutare în față sau la dreaptă, iar b[i][j][k] numărul drumurilor care se termină în punctul (i,j,k) și au ca ultim segment o săritură. Relația de recurență este: a[i][j][k] = a[i-1][j][k] + a[i][j-1][k] + b[i-1][j][k] + b[i][j-1][k] și b[i][j][k] = a[i][j][k-1], deci putem elimina matricea b.

Relația de recurență devine a[i][j][k] = a[i-1][j][k] + a[i][j-1][k] + a[i-1][j][k-1] + a[i][j-1][k-1].

Memorie folosită: O(X*Y*Z)

Se observă că pentru relația de recurență se folosesc doar ultimele două rânduri ale matricei, astfel se poate renunța la matricea 3D și se păstrează doar una de forma a[i][j][2] sau a[2][j][k] după preferințe.

Soluție O(X^2) – 100p

Soluția optimă se bazează tot pe programare dinamică.

Putem observa că problema se reduce la numărarea tuturor șirurilor de 3 valori distincte (fie 1, 2 și 3) astfel încât nu apar două valori de 3 pe poziții consecutive.

Pasul 1:

Calculăm în D[X][Y] numărul de drumuri de la (0, 0) la (X,Y), practic numărul de șiruri distincte, de lungime X +Yj cu valori de 1 și 2.

Pasul 2:

Calculăm în DP[N][Z][0/1] numărul de moduri de a adăuga Z valori de 3 pe un șir aleator format numai din 1 și 2, astfel încât să formez un șir de lungime N (X + Y + Z). 0/1 reprezintă dacă ultimul element adăugat a fost sau nu 3.

Pasul 3:

Rezultatul final este dat de înmulțirea valorii din D[X][Y] cu suma DP[X+Y+Z][Z][0] + DP[X+Y+Z][Z][1]

PROBLEMA 3

Autor: Iulia Tamaș
graduated "Cum laude" Yale University

Ploiești, 26 martie 2017

VIRUS

Vom spune că un experiment este “bun” dacă la finalul experimentului toate celulele sunt de tip M.

Vom spune că un șir de celule s, pe baza căruia Elena începe un experiment, este “bun” dacă experimentul este “bun”.

Se observă că odată ce o celula este de tip M, ea nu își mai schimbă vreodată starea. Așadar, putem împărți șirul s pe care e bazat un experiment în șiruri s_1, s_2, ..., s_p unde s = s_1M..Ms_2M..Ms_p. Șirul s este “bun” dacă fiecare șir s_1,..s_p este “bun”.

Un șir de celule de tip A și B, cu n_b celule de tip B, este “bun” dacă și numai dacă n_b este impar.

Demonstrație

(1)

Fie s un șir de celule de tip A și B, cu o singură celulă de tip B: A..ABA..A
După primul minut șirul devine: A..ABMBA..A
Se observă că șirurile “AB” și “BA” sunt bune.
Prin inducție se demonstrează că șirul s este bun.

(2a)

Fie s un șir de celule de tip A și B, cu un număr impar de celule de tip B: A..ABA...
Dacă cea mai din stângă celula de tip B își schimbă starea în primul minut, s devine A..BMB...
s = s_1Ms_2
s_1 = A..B // un șir cu un singur B deci s_1 este “bun”, dat (1)
s_2 = B... // un șir care are acelaşi număr de B-uri ca s, deci un șir cu un număr impar de B-uri

(2b)

Fie s’ un șir de celule de tip A si B, cu un număr impar de celule de tip B: A..ABB...
Dacă cea mai din stânga celulă de tip B își schimbă starea în primul minut s’ devine A..BMA...
s’ = s_1Ms_2
s_1 = A..B // un șir cu un singur B deci s_1 este “bun”, dat (1)
s_2 = A... // un șir care are cu 2 B-uri mai puțin ca s’, deci un sir cu un număr impar de B-uri

Din (2a) si (2b), continuând inducția, și folosind “AB” și “BA” ca și cazuri de bază, se obține că orice șir s cu un număr impar de celule de tip B este “bun”, atâta timp cât Elena alege cel mai din stânga B pentru fiecare minut.

Așadar, soluția oficială împarte fiecare șir s pentru un experiment în șiruri s_1, s_2, ..., s_p în modul descris mai sus și afișează “DA” numai dacă fiecare șir s_1,..s_p este “bun”.

PROBLEMA 4

Autor: student Dospra Cristian
Facultatea de Informatică, Universitatea București

EMPOWERMAGE

Soluție O(M * N) – 20p

Pentru fiecare interogare vom parcurge șirul de ani și vom verifica condițiile impuse de enunț. În funcție de ce cunoaștem, vom considera unul din cazurile descrise mai jos (singura diferență este că în loc să ne precalculăm cei doi vectori ajutători, ne-am dedus informația din parcurgere)

Soluție O(N + M log N) – 100p

Pentru a obține punctaj maxim, vom îmbunătăți soluția precedentă. Precalculăm doi vectori ajutători pred[] și urm[] cu semnificațiile:

pred[i] = primul an de dinaintea anului i (citit al i-lea) care a avut cel puțin la fel de mulți participanți ca și anul i

urm[i] = primul an de după anul i (citit al i-lea) care are cel puțin la fel de mulți participanți ca și anul i
Cei doi vectori se pot precalcula în complexitate O(N) folosind o stiva
Ținând cont că anii sunt dați în ordine cronologică, vom căuta binar pozițiile în șirul citit al anilor din interogare și vom verifica, folosind cei doi vectori calculați mai sus, dacă sunt îndeplinite condițiile. Deoarece e posibil ca anii ceruți să nu existe în șirul dat, pentru o interogare de forma X Y deducem următoarele cazuri:

Caz1: și X și Y se găsesc în șir
În acest caz, dacă pred[Y] ≠ X, afirmația este FALSA
Dacă pred[Y] = X și avem informații despre TOȚI anii între X și Y (poz(Y) – poz(X), în șir == Y – X), răspunsul este ADEVARAT. Dacă pred[Y] = X dar nu avem informații despre toți anii intermediari, răspunsul este POATE

Caz2: doar Y există în șir
În acest caz, dacă pred[Y]>X, răspunsul este FALS (există un an între X și Y, cu cel puțin la fel de mulți participanți ca în anul Y), altfel, răspunsul este POATE

Caz3: doar X există în șir
Cazul este echivalent cu Cazul2, doar că vom folosi condiția urm[X]<Y, caz în care răspunsul e FALS, atlfel răspunsul este POATE

Caz4: nu există nici X nici Y în șir
În acest caz răspunsul e mereu POATE, deoarece nu avem nici o informație despre cei doi ani