Secţiunea 7-8 avansaţi

PROBLEMA 1

Autor: elev Cristi Dospra
Colegiul Naţional "Grigore Moisil", Bucureşti

DEMOCRATIE

Soluție $O(2^N * N)$ – 20p

Se generează toate configurațiile de lungime N formate doar din valorile 1 și 2, (1 – lucrează muncitorul 1, 2 – lucrează muncitorul 2) și se calculează costul fiecăreia, alegând-o pe cea care oferă suma minima.

Soluție O(N) – 100p

Problema se rezolvă utilizând metoda greedy cu câteva observații matematice elementare.
Fie:

- N = numărul de copaci
- K = numărul de copaci tăiați de muncitorul 1
- SumSt(K) = suma înălțimilor copacilor de la 1 la K
- SumDr(K) = suma înălțimilor copacilor de la K la N
- T1 și T2 = tarifele muncitorului 1 și muncitorului 2
- C1 și C2 = costurile suplimentare cerute de muncitorul 1 și muncitorul 2

Este evident că dacă muncitorul 1 taie K copaci din cei N, vom plăti SumSt(K) * T1 și SumDr(K+1) * T2. La valoarea pe care o obținem se mai adaugă și eventualele costuri suplimentare, costuri obținute în funcție de numărul de copaci tăiați de fiecare muncitor. Deoarece dorim să minimizăm acest cost suplimentar total, deducem că trebuie să alternăm cât mai mult posibil muncitorii.
De exemplu, dacă avem 11 copaci și muncitorul 1 taie 7 copaci (deci muncitorul 2 taie 4 copaci), trebuie să avem următoarea distribuție: 121212121 **11**. Deci vom plăti de două ori costul suplimentar cerut de muncitorul 1.
Deci, în urma observațiilor de mai sus, vom folosi următoarea abordare:

1. Precalculăm vectorii SumSt și SumDr.
2. Ne variem numărul de copaci tăiați de primul muncitor.
3. Calculăm costul total în timp constant folosind formulele date.
4. Alegem minimul dintre costurile obținute.

PROBLEMA 2

Autor: prof. Adriana Constantin
Colegiul Naţional "Nichita Stănescu", Ploieşti

TREASURE HUNT

Problema determină distanțele dintre n puncte în plan și câștigul maxim obținut cu cel mult m dintre cele n date.

Pentru prima cerința se cere un maxim dintre n-1 distanțe calculate între puncte consecutive și o altă valoare care determina suma eforturilor pe fiecare tronson, cerințe foarte simple, pentru care este necesară doar formula distanței dintre 2 puncte
Pentru cerința 2 se va aplica programarea dinamica pentru a determina punctajul maxim obținut cu cel mult m opriri pe traseu. Pentru aceasta am folosit 3 vectori, a, punct si urm, astfel: a[i]= numara din cate opriri se obține punctajul maxim punct[i] dacă se face oprirea in punctul i, iar urm[i] punctul urmator de pe traseu corespunzător acesteia.

PROBLEMA 3

Autor: prof. Rodica Pintea
Colegiul Național "Grigore Moisil", București

BOMBOANE
Soluție O(N * Ture) – 60p
Simulăm efectiv operația de luat bomboane din pungi până în momentul în care ajungem la o pungă ce nu mai are suficiente bomboane, astfel obținem numărul total de ture complete. Numărul total de bomboane adunate este dat de formula:

Fie X = N * Ture;
Nr Bomboane = X * (X+1) / 2

X reprezintă ultima cantitate de bomboane luată din ultima tură completă.

Soluție O(N) – 100p
Putem determina pentru fiecare pungută în parte numărul de ture pe care aceasta le poate comepleta. Se observă că dacă avem N pungute și K ture, atunci punguța de pe poziția P trebuie să aibă minim K * P + N * (K * (K-1)) / 2 bomboane.
Relația de mai sus se obține astfel:

Din a P-a punguță luăm pe rând:
La tura 1: P bomboane
La tura 2: P + N bomboane
La tura 3: P + 2*N bomboane
.
.
.
La tura K: P + (K-1)*N bomboane

Însumând valorile de la fiecare tură și aplicând câteva calcule simple (factor comun și sumă Gauss) bținem relația de mai sus.

Dacă desfacem parantezele și aducem la numitor comun, obținem următoarea ecuație de gradul 2:

$2*K*P + N*K^2 - N*K$.

Deoarece aceasta trebuie să fie mai mică sau egală cu numărul de bomboane din pungă pentru a face turele, obținem că:

$N*K^2 - K*(N - 2*P) - 2*Punga[P] \le 0$

Rezolvăm ecuația de gradul 2 cu necunoscuta în K:

$\Delta = (N - 2 * P)^2 + 8*N*Punga[P] \Rightarrow K = (N - 2*P) + Sqrt((N - 2 * P)^2 + 8*N*Punga[P])$

Numărul final de ture va fi K minim obținut din toate valorile citite.

Soluție O(N * log Ture) – 100p (Cristi Dospra)
Ne folosim tot de relația $2*K *P + N * K^2 - N*K \leq 2*Punga[P]$. În loc de a calcula efectiv K-ul, îl vom căuta binar.

PROBLEMA 4

Autor: prof. Luminiţa Năstase
Colegiul Național "Nichita Stănescu", Ploieşti

MORUM
Pentru cazul în care modelul ales este 1, aria suprafeței rămase prin decupare la pasul n este dată de formula $A(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$, iar perimetrul la pasul n este dat de formula $P(n) = \frac{3^{n+1} \cdot l}{2^n}$.
Pentru cazul în care modelul ales este 2, aria suprafeței rămase prin decupare la pasul n este dată de formula $A(n) = \left(\frac{8}{9}\right)^n \cdot l^2$, iar perimetrul la pasul n este dat de formula

$$P(n) = \begin{cases} 4 \cdot l, dacă\ n = 0 \\ 4 \cdot l + 4 \cdot \frac{l}{3}, dacă\ n = 1 \\ P(n-1) + 8^{n-1} \cdot \frac{4 \cdot l}{3^n}, dacă\ n > 1 \end{cases}.$$

Pentru cazul în care modelul ales este 1, aria suprafeței rămase prin decupare la pasul n este dată de formula $A(n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{3l^2\sqrt{3}}{2}$, iar perimetrul la pasul n este dat de formula $P(n) = 2^n \cdot 6l$.

Pentru implementare am folosit operații pe numere mari.