PROBLEMA 1

BTRANSPORT

Autori:
Ilie Cătălin-Andrei (enunț, descriere soluție)
Vlad Costin Alexandru (sursă oficială, generare teste)

Vom începe prin a observa că există 3 categorii de orașe: cele care au, inițial, o cantitate mai mare decât ar trebui, cele care au exact cât trebuie să aibă și la final și cele care au o cantitate mai mică decât ar trebui.

Considerăm mulțimea A a orașelor care au o cantitate mai mare și mulțimea B a orașelor care au o cantitate mai mică. Este evident că din orașele din A vor pleca anumite cantități care au destinația finală în B. Observăm că cel mai bun mod pentru a minimiza transporturile unor cantități de la orașele din A la orașele din B este să le facem numai pe drumuri de sumă minimă dintre ele. Creăm graful bipartit A-B, cu muchii între elementele din A și B de costuri egale cu valorile obținute în urma aplicării unui algoritm pentru determinarea acestora (Roy-Floyd).

Problema se încheie prin aplicarea algoritmului de flux maxim de cost minim, creându-se o sursă fictivă legată de orașele din A prin muchii de capacitați egale cu surplusurile de cantități ale acestora (costuri 0) și un nod fictiv de scurgere legat de orașele din B prin muchii de capacitați egale cu cantitățile lipsă (costuri 0). Muchiilor dintre A și B le asociăm cantități infinite pentru flux.

PROBLEMA 2 **autor stud. Vlad Costin Alexandru**

PJOC

Prima observație pe care trebuie să o facem este că probabilitatea ca Pepe să câștige este egală cu:

$$\frac{\sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^{i\le n,\, j\le n} p[i]*p[j](\text{ cmmdc}(v[i],v[j]=1)}{\sum_{\substack{i=1 \\ j=i+1}}^{i\le n,\, j\le n} p[i]*p[j]}$$

O prima soluție **(25-30 de puncte**) ar fi să luăm fiecare pereche de indici i,j (i<j) și să calculăm două sume : s1 = suma produselor p[i]*p[j] pentru care cmmdc(v[i],v[j] = 1) , adică numărul de cazuri (ca pondere) astfel încât Pepe să câștige și s2 = suma produselor p[i]*p[j] , adică numărul de cazuri totale. Astfel soluția va fi s1/s2 (fracție ireductibilă), iar complexitatea va fi O(N^2) .

Soluție (100 de puncte)
Urmatoarea observație este că valorile bilețelelor sunt <= 500000 și că 2*3*5*7*11*13 <= 500000, dar 2*3*5*7*11*13*17 > 500000 . De aici putem trage concluzia că orice număr de la 1 la 500000 are în descompunerea sa maxim 6 factori primi distincți. Astfel pentru fiecare număr p[i] din șir, calculăm s = $\sum_{j=i+1}^{j\le n} p[j]\ (cmmdc(v[i],v[j]=1)$, apoi adaugăm s*p[i] la cazurile în care Pepe câștigă. Acest lucru îl putem obține folosind un vector de sume parțiale S[1..500000] , unde S[i] = suma lungimilor bilețelelor din șir pentru care valoarea bilețelelor este divizibilă cu i și observația

că numărul cazurilor câștigătoare (ca pondere) pentru un anumit i este egal cu numărul cazurilor totale (ca pondere) pentru acel i minus numărul cazurilor necâștigătoare (ca pondere) pentru i . Numărul cazurilor totale se calculează foarte ușor , iar pentru numărul cazurilor necâștigătoare folosim Principiul Includerii și Excluderii deoarece , pentru un anumit v[i] = $p_1^{q1} + p_2^{q2} + \ldots p_k^{qk}$, k<=6 (descompunerea în factori primi a lui v[i]) , numărul cazurilor necâștigătoare (ca pondere) = p[i] * $\sum_{j=i+1}^{j\leq n} p[j], (cmmdc\ (v[j], v[i]! = 1)$ adica p[i] *[($\sum_{j=i+1}^{j\leq n} p[j], (p1 \mid v[j])$ + $\sum_{j=i+1}^{j\leq n} p[j], (p2 \mid v[j])$ + … + $\sum_{j=i+1}^{j\leq n} p[j], (pk \mid v[j])$ - $\sum_{j=i+1}^{j\leq n} p[j], (p1 * p2 \mid v[j])$ - … - $(-1)^{k-1} * \sum_{j=i+1}^{j\leq n} p[j], (p1 * p2 * \ldots * pk \mid v[j])$] (Principiul includerii și excluderii) .

PROBLEMA 3 **autor prof. Daniela Lica**

RISC

Vom reduce problema la identificarea unei tăieturi de capacitate minimă, pe care o vom obţine folosindu-ne de o reţea de flux.

Construcţia reţelei:

Modelăm relaţiile existente între cei **n** angajaţi ai firmei cu ajutorul unui graf ponderat **G=(V,E)** unde **|V|=n** şi **|E|=m**. Fie d_i suma tuturor incompatibilităţiilor angajatului **i**. Vom transforma graful **G** în reţeaua de flux $F=(V_F,E_F)$, după cum urmează:

- Adăugăm două noduri: sursă fictiva **s** şi o destinaţie fictivă **t**.
- Înlocuim fiecare muchie **(i,j)** a lui **G** cu **2** arce de capacitate egală cu mărimea costului (incompatibilităţii) dintre **i** şi **j**.
- Conectăm sursa cu orice nod din **G** cu un arc de capacitate **x** $= \sum_{i \in V} d_i$.
- Conectăm fiecare nod din **G** cu nodul **t** printr-un arc de capacitate $x + 2*(A/B) - d_i$.

În final, reţeau de flux este definită astfel:

$V_F = V \cup \{s,t\}$

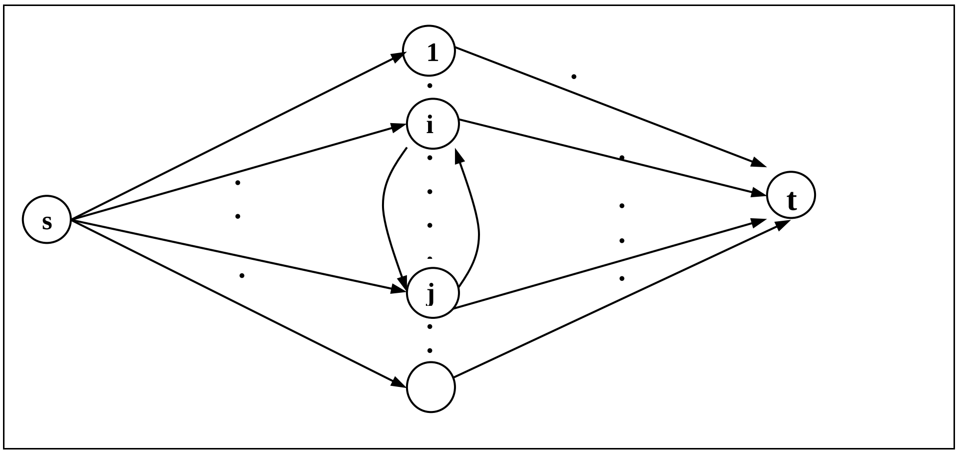
$E_F = \{(i,j) | (i,j) \in E\} \cup \{(s,i) | i \in V\} \cup \{(i,t) | i \in V\}$

$C_{i,j} \neq 0, \forall\ (i,j) \in E$

$C_{s,i} = x,\ i \in V$

$C_{i,t} = x + 2*(A/B) - d_i,\ i \in V$

$C_{i,j} = 0,\ (i,j) \notin E$



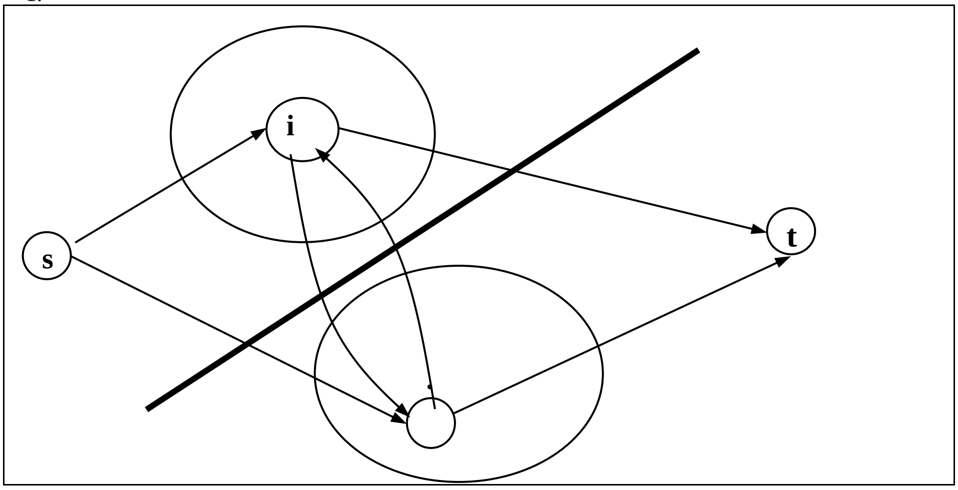
Pe această reţea de flux, se determină o tăietură de capacitate minimă. Considerăm o partiţie a lui V în două submulţimi **S** şi **T** astfel încât **s∈S** şi **t∈T** determină o tăietură **s-t**. Fie V_1 = **S - {s}** şi V_2=**T-{t}**. Dacă $|V_1|=0$ atunci capacitatea tăieturii **c(s-t)**=**x|V|**. Altfel, capacitatea tăieturii este dată de:

$$c(s-t) = \sum_{i\in S, j\in T} c_{i,j} = \sum_{j\in V_2} c_{s,j} + \sum_{i\in V_1} c_{i,t} + \sum_{i\in V_1, j\in V_2} c_{i,j}$$

$$= x|V_2| + (x|V_1| + 2A/B|V_1| - \sum_{i\in V_1} d_i) + \sum_{i\in V_1, j\in V_2} c_{i,j} = x|V| + |V_1| \; 2\left(A/B - \left(\frac{\sum_{i\in V_1} d_i - \sum_{i\in V_1, j\in V_2} c_{i,j}}{2V_1} \right)\right)$$

=

dar, $\sum_{i\in V_1} d_i - \sum_{i\in V_1, j\in V_2} c_{i,j}$ reprezintă dublul incompatibilităţilor muchiilor subgrafului determinat de vârfurile din V_1.



Observăm că $fr = \left(\frac{\sum_{i\in V_1} d_i - \sum_{i\in V_1, j\in V_2} c_{i,j}}{2V_1} \right)$ este tocmai „factorul de risc" al subgrafului generat de V_1 în G. Rezultă că tăietura are capacitatea: **x|V| + 2|V₁|*(A/B – fr).** Ea este de capacitate minimă dacă **`A/B < fr.`** Deci dacă există un subgraf cu risc mai mare decât A/B atunci mulţimea vârfurilor lui V_1 generează un astfel de subgraf.